GEOMETRIE

DER

KREISE EINER KUGEL.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität

Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde vorgelegt

von

Ferdinand Schumacher

aus

Paris.

METZ
Lothringer Zeitung
1889.

GEOMETRIE

DER

KREISE EINER KUGEL.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität

Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde vorgelegt

von

Ferdinand Schumacher

aus

Paris.

METZ
Lothringer Zeitung
1889.

Herrn Theodor Petermann

in Dankbarkeit gewidmet

vom

Verfasser.

Unter den geometrischen Konstruktionsaufgaben hat das Apollonische Berührungsproblem von jeher hervorragende Bedeutung gefunden. Dasselbe lautet: «Einen Kreis zu zeichnen, welcher 3 gegebene berührt», und Apollonius selbst (247 v. Chr.) war der erste, welcher eine vollständige Lösung lieferte. Seine hierauf bezüglichen Schriften gingen indessen verloren, und daher versuchten Adrianus Romanus, Vieta und Camerer die Apollonische Lösung wiederherzustellen (1600). Die entsprechende Aufgabe für den Raum: «Eine Kugel zu konstruiren, welche 4 gegebene Kugeln berührt» stellte zuerst Fermat (1629) und löste sie synthetisch; Gaultier (1812) hat das ganze Problem für die Ebene und den Raum ausgeführt.

Eine weitere Verallgemeinerung führte Steiner (1826) herbei, indem er die Berührung als einen speziellen Fall des Schneidens betrachtete, sodass das Problem nun lautet: «Einen Kreis zu suchen, welcher 3 gegebene Kreise oder eine Kugel, welche 4 gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln schneidet». Diese Aufgabe wurde in neuester Zeit von Herrn Prof. Reye in seinem Buche «Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme (Leipzig 1879)» in umfassender Weise untersucht. Von den zahlreichen, hierbei zur Anwendung kommenden Sätzen über Kugelsysteme und Kreissysteme einer Kugel hat Herr Prof. Thomae (vergl. Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 29. S. 284) die letzteren durch stereographische Projektion auf die Ebene übertragen und dadurch nochmals eine vollständige Lösung des erweiterten Apollonischen Problems für die Ebene gegeben.

In der vorliegenden Arbeit sollen die Eigenschaften der Kreissysteme einer Kugel untersucht werden, und zwar ge-

schieht dies am zweckmässigsten durch Lösung des allgemeinen Apollonischen Problems für die Kugel. Es findet sich naturgemäss eine Anzahl der hier abgeleiteten Sätze schon in der oben genannten Druckschrift des Herrn Prof. Reye; während aber Herr Reye dieselben mit Hülfe reciproker Radien und orthogonaler Kugeln ableitet, gelangen wir hier zu denselben auf einem anderen, bisher noch nicht betretenen Wege, nämlich mittelst der Polarentheorie. Wir weisen jedem Kreise einer Kugel den Pol seiner Ebene in Bezug auf diese Kugel zu und zeigen, dass dann gewissen Kreissystemen und Kreisschaaren der Kugel gewisse Hyperboloide und doppelt berührende Kegelschnitte im Raume entsprechen. Die Einführung dieser Gebilde in die Theorie der Kugelkreise ist neu; sie gestattet Betrachtungen, welche sich nur mit Punkten und nicht mehr mit Kreisen beschäftigen, und die gefundenen, allgemeinen Sätze ergeben durch einfache Uebertragung die Beziehungen der Kugelkreise.

Wir werden im Folgenden häufiger die Ausdrücke «Kreisbündel» und «Kreisbüschel» gebrauchen, für welche wir die beiden Definitionen festlegen wollen:

1) Alle Kugelkreise, deren Ebenen durch einen Punkt gehen, bilden ein Kreisbündel; ihre Pole in Bezug auf die Kugel liegen in einer Ebene, und das Bündel ist daher durch 3 seiner Kreise bestimmt.
2) Alle Kugelkreise, deren Ebenen durch eine Gerade gehen, bilden ein Kreisbüschel; ihre Pole in Bezug auf die Kugel liegen in einer Geraden, und das Büschel ist daher durch 2 seiner Kreise bestimmt.

Hieran anschliessend führen wir noch folgende Bezeichnungen ein. Wir bezeichnen die Kugel mit K^2, einen Kreis auf ihr mit k oder k_ν, seine Ebene mit $\varkappa$ oder $\varkappa_\nu$ und deren Pol mit K bezw. K_ν; einen Kegelschnitt mit C^2, seine Ebene mit γ. Eine Gerade heisse g, ihre Polare g' u. s. w. Abkürzend werden wir gelegentlich einen Berührungskegel der Kugel, dessen Mittelpunkt K ist, den «Kegel K» nennen.

I. Das rechtwinkelige Schneiden.

Auf K^2 ist k_1 gegeben, gesucht alle Kreise k, welche k_1 rechtwinkelig schneiden. Die Tangenten t und t_1 in einem gemeinsamen Punkte B der Kreise k, k_1 stehen aufeinander normal und sind infolge dessen polar zu einander. Da nun alle Tangenten t_1 von k_1 in der Ebene $\varkappa_1$ liegen, so gehen alle jene Tangenten t der Kreise k durch den Pol K_1 von $\varkappa_1$, d. h. die k bilden ein Bündel. Das ist der Satz:

«Alle Kreise k, welche einen Kreis k_1 normal schneiden,
«bilden ein Bündel, dessen Mittelpunkt der Pol von $\varkappa_1$ ist;
«ihre Pole liegen in $\varkappa_1$.»

Wir legen durch 2 polare Geraden g' und g je eine beliebige Kreisebene $\varkappa$ und $\varkappa_1$ und ziehen an die Kreise k und k_1 im einen Schnittpunkte B die Tangenten t und t_1. Die Polare von t_1 ist eine Tangente von K^2 im Punkte B und schneidet g', weil g und t_1 in einer Ebene liegen, sie fällt also mit t zusammen, und da t und t_1 als polare Geraden normal sind, so schneiden sich k und k_1 rechtwinkelig im Punkte B. Die Ebenen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ waren beliebig durch g' und g gelegt, also gilt allgemein:

«Sind die Achsen zweier Kreisbüschel polare Geraden,
«so schneidet jeder Kreis des einen Büschels jeden Kreis
«des andern normal.»

Sind nun auf K^2 die beiden Kreise k_1 und k_2 gegeben, so liegen die Pole aller Kreise, welche diese beiden rechtwinkelig schneiden, nach obigem Satze auf der Schnittlinie $\overline{\varkappa_1 \varkappa_2}$, die Kreise selbst bilden also ein Büschel, dessen Achse $K_1 K_2$ zu $\overline{\varkappa_1 \varkappa_2}$ polar ist; mit Hülfe des letzten Satzes können wir daher sagen:

«Alle Kreise, welche 2 Kreise k_1 und k_2 normal schneiden, «bilden das Büschel $K_1\ K_2$; sie werden von allen Kreisen «des Büschels ($k_1\ k_2$) rechtwinkelig geschnitten.»

Drei Kreise, deren Ebenen nicht durch eine Gerade gehen, sondern sich in einem Punkte schneiden, werden nur von einem Kreise k rechtwinkelig geschnitten, sein Pol ist nach dem Satze S. 7 der Schnittpunkt K der 3 Kreisebenen. Jede durch K gehende Gerade g hat eine in $\varkappa$ liegende Polare g', und nach Obigem wird daher jeder Kreis des Büschels g von k rechtwinkelig geschnitten, und da g eine beliebige durch K gehende Gerade war, so gilt das Gesagte von jedem Kreise des Bündels K. So haben wir:

«Alle Kreise eines Bündels werden von einem einzigen, «reellen oder imaginären Kreise normal geschnitten; der- «selbe heisst der Orthogonalkreis des Bündels, und seine «Ebene hat den Mittelpunkt des Bündels zum Pol.»

und ferner noch:

«Drei nicht in einem Büschel liegende Kreise werden nur «vom Orthogonalkreise des durch sie gehenden Bündels «normal geschnitten.»

Der Orthogonalkreis eines Bündels ist nur dann reell, wenn der Mittelpunkt des Bündels ausserhalb der Kugel liegt; der Orthogonalkreis reduziert sich auf einen Punkt, wenn der Mittelpunkt des Bündels ein Punkt der K^2 ist. Liegt endlich der Mittelpunkt des Bündels innerhalb K^2, so ist der Orthogonalkreis imaginär; in diesem Falle gehört zum Bündel auch der Kreis, welcher die kleinsten durch K gehenden Sehnen der Kugel zu Durchmessern hat und von jedem Kreise des Bündels in diametral gegenüberliegenden Punkten geschnitten wird.

II. Die Berührung.

Zwei Kreise k_1 und k mögen im Punkte B sich und die gemeinschaftliche Tangente t_1 berühren; da t_1 in $\varkappa$ und $\varkappa_1$ liegt,

so fällt ihre Polare t'_1 d. h. die in B auf t_1 normale Tangente mit $K K_1$ zusammen und geht stets durch K_1, wenn t_1 auf k_1 rollt. Also:

«Die Pole aller Kugelkreise k, welche einen Kreis k_1 be-
«rühren, liegen auf demjenigen Berührungskegel der K^2,
«welcher den Pol K_1 zum Mittelpunkte hat.»

Die Pole aller Kreise k, welche 2 gegebene k_1 und k_2 berühren, liegen daher auf der Kurve IV. Ordnung C^4, in welcher sich die beiden Kegel K_1 und K_2 schneiden. Eine beliebig durch $K_1 K_2 = g'$ gelegte Ebene ε (Fig. 1) trifft die C^4 in 4 Punkten C', D', C'', D'', welche durch 6 Sehnen der Kurve verbunden werden können. Vier dieser Sehnen sind Strahlen der Kegel K_1 und K_2 und berühren daher die K^2 in je einem der Punkte A_1, B_1, A_2, B_2, in denen die beiden Kreise k_1 und k_2 von ε geschnitten werden; die beiden andern Sehnen $C'D'$ und $C''D''$ mögen sich in G' schneiden. Der Pol der Geraden $C'D'$ ($C''D''$) in Bezug auf den in ε liegenden Kreis k_ε der K^2 ist der Schnittpunkt P' (P'') der beiden Polaren $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ ($A_1 B_2$ und $A_2 B_1$) von C' und D' (D'' und C''); infolgedessen hat die Gerade $P'P''$ zum Pole bezüglich k_ε den Punkt G', durch welchen daher auch die Diagonalen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ des k_ε eingeschriebenen Vierecks $A_1 A_2 B_1 B_2$ gehen. Aus Letzterem folgt weiter, dass G' bezüglich k_ε die Gerade $K_1 K_2$ zur Polare hat, also fallen $P'P''$ und $K_1 K_2$ zusammen, und G' liegt auf der Polare $g = \overline{\varkappa_1 \varkappa_2}$ von g'. Jede mit g' in einer Ebene liegende, aber nicht durch K_1 oder K_2 gehende Sehne CD der C^4 schneidet demnach auch g. Da nach der Figur P' und P'' bezüglich k_ε conjugiert sind, so liegt P' auf der Polare $C''D''$ von P'' und umgekehrt P'' auf der Polare $C'D'$ von P'. Wir werden nun gleich nachweisen, dass P' und P'' von der Lage der Ebene ε unabhängig sind, jede g' schneidende, aber nicht durch K_1 und K_2 gehende Sehne der C^4 liegt, wie hieraus folgt, in einer der beiden unveränderlichen Ebenen $P'g = \gamma''$ und $\overline{P''g} = \gamma'$, die C^4 zerfällt also in 2 Kegelschnitte C'_{12} und C''_{12} der Ebenen γ' und γ''. Die beiden reellen oder imaginären Schnittpunkte

der Kreise k_1 und k_2 liegen auf den beiden Kegeln K_1 und K_2 also auch auf den Schnittkurven C'_{12} und C''_{12}, und zwar berühren diese ebenso wie die Kegel in jenen beiden Punkten die Kugel K^2.

Die Unabhängigkeit der Punkte P' und P'' von ε ergiebt sich aus Folgendem. Wie schon bewiesen, liegen P' und P'' auf $g' = K_1 K_2$ und sind, wie aus der Figur ersichtlich, durch K_1 und K_2 harmonisch getrennt und in Bezug auf k_ε also auch auf K^2 conjugiert; weisen wir nun je 2 Punkte von g' einander zu, welche durch K_1 und K_2 bezw. durch die K^2 harmonisch getrennt sind, so erhalten wir 2 involutorische Punktreihen, von denen die erstere zwei reelle (K_1, K_2), die letztere 2 reelle (M, N) oder imaginäre Ordnungselemente besitzt, und da diese sich nicht trennen, so haben die Punktreihen stets ein reelles Punktpaar P', P'' gemein, aber auch nur eines, d. h. P' und P'' ändern ihre Lage mit ε nicht.

Der Pol der Ebene γ' liegt auf g' und fällt mit dem Pole P' von $C' D'$ bezüglich k_ε zusammen; ebenso folgt, dass P'' der Pol der Ebene γ'' ist.

Die beiden Punkte P' und P'' haben für k_1 und k_2 noch eine besondere Bedeutung. Legen wir nämlich durch k_1 einen Kegel mit dem Centrum P', so wird derselbe von jeder durch g' gelegten Ebene in 2 Geraden geschnitten, welche durch 2 Punkte A_2 und B_2 von k_2 gehen, der Kreis k_2 liegt also vollständig auf diesem Kegel; dasselbe gilt von P''. Jeder der beiden Punkte P' und P'' ist daher das Centrum einer durch k_1 und k_2 gehenden Kegelfläche, und sie heissen daher Kegelcentren von k_1 und k_2. Also haben wir die beiden Sätze:

«Zwei sich nicht berührende Kreise k_1, k_2 einer Kugel «können durch 2 Kegel verbunden werden; die beiden Kegel-«centra liegen auf der Polare der Schnittlinie $\overline{\varkappa_1 \varkappa_2}$ und sind «sowohl durch die K^2 als auch durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ harmonisch «getrennt.»

und ferner:

«Zwei Berührungskegel einer Kugel K^2 schneiden sich «im Allgemeinen in zwei Kegelschnitten, welche die K^2 in

«den Schnittpunkten der beiden Berührungskreise berühren; «ihre Ebenen haben die Kegelcentra der Berührungskreise «zu Polen und sind daher sowohl durch die Ebenen dieser «Kreise als auch durch die K^2 harmonisch getrennt.»

Die Kegelschnitte C'_{12} und C''_{12} sind nur dann nicht beide vorhanden, wenn k_1 und k_2 sich in einem Punkte berühren: dann werden die beiden Kegel K_1 und K_2 in der Geraden $K_1 K_2$ von derselben Tangentialebene der K^2 berührt und haben daher nur einen Kegelschnitt und die Gerade $K_1 K_2$ gemein.

Die Pole aller k_1 und k_2 berührenden Kreise lagen auf C'_{12} und C''_{12}. Denken wir uns eine dieser Kurven durch 2 projektive Strahlenbüschel erzeugt, so entsprechen letzteren als Polaren 2 projektive, concentrische Strahlenbüschel, welche in verschiedenen Ebenen liegen und daher ein Ebenenbüschel II. Ordnung erzeugen; dasselbe umhüllt eine Kegelfläche, und der Mittelpunkt der letzteren ist der Pol einer der Ebenen γ' und γ'' von C'_{12} und C''_{12}, also P' oder P''. Daher:

«Alle Kreise k, welche k_1 und k_2 berühren, liegen in 2 «Kreisbündeln, deren Centra die Kegelcentra von k_1 und «k_2 sind. Die Kreisebenen umhüllen 2 durch k_1 und k_2 «gehende Kegelflächen, ihre Pole liegen auf 2 Kegelschnitten, «welche die K^2 in den beiden Schnittpunkten von k_1 und «k_2 berühren.»

Wir suchen nun zu 3 Kreisen k_1, k_2, k_3 einen berührenden k; sein Pol liegt, weil er k_1 und k_2 berührt, auf einem Kegelschnitte C_{12}, und weil er k_2 und k_3 berührt, auch auf einem Kegelschnitt C_{23}. Wir erhalten demnach die Pole aller Berührungskreise k, wenn wir jede der Kurven C'_{12} und C''_{12} mit C'_{23} und mit C''_{23} zum Durchschnitte bringen; dies ergiebt 8 Punkte, welche zu 2 auf den vier Geraden $\overline{\gamma'_{12}\gamma'_{23}}$, $\overline{\gamma'_{12}\gamma''_{23}}$, $\overline{\gamma''_{12}\gamma'_{23}}$, und $\overline{\gamma''_{12}\gamma''_{23}}$ liegen. Die Ebenen γ gehen alle durch den Punkt $\varkappa_1\,\varkappa_2\,\varkappa_3$, also auch die soeben genannten 4 Geraden. Die jenen 8 Punkten entsprechenden Kreise k berühren k_1 und k_3, also liegen die 8 Punkte auch theils auf C'_{13}, theils auf C''_{13} und damit auf γ'_{13} bezw. γ''_{13}. Da nun die Schnittlinie $\overline{\gamma'_{13}\gamma''_{13}} = \overline{\varkappa_1\,\varkappa_3}$ den Punkt $\varkappa_1\,\varkappa_2\,\varkappa_3$ enthält, so geht durch jede der genannten

4 Geraden eine der beiden Ebenen γ'_{13} und γ''_{13}, aber auch nur eine, weil sie sonst zusammenfallen müssten, was unmöglich ist. Die 6 Ebenen γ schneiden sich also zu 3 in 4 Geraden des Punktes $\overline{x_1 x_2 x_3}$, und daraus folgt für ihre Pole, die Kegelcentra:

«3 Kreise einer Kugel haben im Allgemeinen 6 Kegel-«centra; dieselben liegen mit den Polen der 3 Kreise in «einer Ebene und zwar zu 3 in 4 Geraden, welche Kegel-«achsen heissen.»

Da auf jeder Polaren der 4 Kegelachsen die Pole zweier Berührungskreise k liegen, so gehen durch jede Kegelachse die Ebenen von 2 Kreisen k. Das ist der weitere Satz:

«Die Kreise einer Kugel, welche 3 gegebene berühren, «liegen zu 2 in den 4 Kreisbüscheln, deren Achsen die «Kegelachsen sind.»

Wir wollen noch einen Augenblick bei den Schnittkurven der Berührungskegel einer K^2 verweilen. Eine beliebige Ebene γ schneidet einen solchen Kegel in einer Kurve II. Ordnung und seinen Berührungskreis in 2 reellen oder imaginären Punkten, in welchen jene Kurve die K^2 berührt; also jeder auf einem Berührungskegel der K^2 liegende Kegelschnitt berührt die K^2 doppelt.

Wir können auch das Umgekehrte beweisen. Sei C^2 ein die K^2 doppelt berührender Kegelschnitt, A und B die Berührungspunkte. Lässt sich durch diese C^2 ein Berührungskegel legen, so muss dessen Berührungskreis durch A und B gehen und daher seine Spitze auf der Polaren g' der Berührungssehne $AB = g$ liegen. Ein Berührungskegel der K^2, welcher einen beliebigen Punkt X der C^2 zum Centrum hat, schneidet g' in 2 Punkten K_1 und K_2, und diese sind Mittelpunkte zweier Berührungskegel der K^2, welche beide durch die C^2 gehen; ihre in der Ebene γ liegenden Schnittkurven haben nämlich mit C^2 die Punkte X, A und B sowie die Tangenten in den beiden letzteren gemein. Dieselbe Konstruktion für einen andern Punkt Y der C^2 führt zu den-

selben Punkten K_1 und K_2, da die beiden Strahlen $K_1 Y$ und $K_2 Y$ auch auf dem Berührungskegel Y liegen. Also:

«Jeder auf einem Berührungskegel der K^2 liegende Kegel-«schnitt C^2 berührt die K^2 doppelt, und umgekehrt lassen «sich durch jede die K^2 doppelt berührende C^2 im Allge-«meinen und höchstens 2 Berührungskegel der K^2 legen; «ihre Mittelpunkte liegen auf der Polaren der Berührungs-«sehne.»

Sei K ein Berührungskegel der K^2, l eine beliebige Gerade der Ebene $\varkappa$ seines Berührungskreises k und L der Pol von l bezüglich k. Dann hat die Gerade l bezüglich der K^2 dieselbe Gerade $KL = l'$ zur Polare wie die Ebene $\overline{Kl}$ bezüglich des Kegels K, und ebenso hat jeder Punkt L von $\varkappa$ diejenige Ebene $\overline{Kl}$ bezüglich der K^2 zur Polare, welche in Bezug auf den Kegel K Polarebene der Geraden KL ist.

Wir legen von den Punkten K einer Geraden g' Berührungskegel an die K^2 und schneiden sie durch eine beliebige, die Polare g von g' enthaltende Ebene γ; dann erhalten wir in γ eine Schaar von Kegelschnitten C^2, welche die K^2 in denselben beiden Punkten von g berühren. Da g in jeder der Ebenen $\varkappa$ liegt, so ist nach dem eben Gesagten g' in Bezug auf jeden der Kegel K Polare der Ebene $\overline{Kg}$, also der Punkt $G = \overline{g'\gamma}$ bezüglich jeder C^2 Pol von g. Und da ferner ein beliebiger Punkt M von g in allen Ebenen $\varkappa$ liegt, so ist seine Polarebene μ bezüglich jedes Kegels K Polarebene der Geraden KM, d. h. jeder Punkt M von g hat bezüglich aller C^2 dieselbe durch G gehende Polare m. Daraus ergiebt sich:

«Alle Berührungskegel der K^2, deren Mittelpunkte auf «einer Geraden g' liegen, werden von einer beliebig durch «g gelegten Ebene γ in einer Schaar von Kurven II. Ord-«nung geschnitten. Diese berühren die K^2 in denselben «beiden reellen oder imaginären Punkten von g und haben «jedes Poldreieck gemein, dessen eine Seite in g liegt.»

Wir sind jetzt im Stande, einen die K^2 doppelt berührenden Kegelschnitt zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt X geht, und dessen Berührungspunkte auf einer

gegebenen Geraden g liegen. Die Konstruktion ist einfach, sobald g die K^2 in reellen Punkten schneidet; denn von der gesuchten Kurve sind dann der Punkt X, die beiden Berührungspunkte und die Tangenten in den letzteren bekannt. Sind die Berührungspunkte dagegen imaginär, so wenden wir den letzten Satz an. Zu den in diesem Satze genannten Kurven C^2 gehört auch der in der Ebene γ liegende, reelle oder imaginäre Kreis k der K^2. (Fig. 2.) Bezüglich desselben sei GMM' dasjenige Poldreieck, dessen eine Seite GM durch X geht, während eine zweite MM' auf g liegt; der vierte, von X durch G und M harmonisch getrennte Punkt Y liegt dann auf der gesuchten C^2, und die beiden Geraden $M'X$ und $M'Y$ sind Tangenten derselben. Ist ferner GNN' ein zweites Poldreieck von k und Z der vierte, von X durch GN' und N harmonisch getrennte Teilpunkt, so liegt auch Z auf der C^2, und diese ist nun bestimmt. Es bleibt nur nachzuweisen, dass diese C^2 mit k alle Poldreiecke gemein hat, deren eine Ecke G ist. Aus der Konstruktion geht hervor, dass bezüglich C^2 XY Polare von M', G Pol von g und N Pol von $N'G$ ist, daher sind GMM' und GNN' Poldreiecke auch der C^2. In g liegen 2 involutorische Punktreihen, wenn wir Punkte, die bezüglich k, und ferner Punkte, die bezüglich der C^2 conjugirt sind, einander als entsprechende zuweisen. Diese beiden involutorischen Punktreihen sind aber identisch, da sie 2 Elementenpaare M, M' und N, N' gemein haben, und daher hat jeder Punkt von g in Bezug auf k und auf die C^2 dieselbe durch G gehende Polare, d. h. k und die C^2 haben alle Poldreiecke gemein, deren eine Ecke G ist. Also:

«Ein die Kugel K^2 doppelt berührender Kegelschnitt ist «durch einen Punkt und die Berührungssehne bestimmt.»

Durch drei beliebige Punkte ist ein die K^2 doppelt berührender Kegelschnitt im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Nämlich die Mittelpunkte aller durch einen Punkt X gehenden Berührungskegel der K^2 liegen auf demjenigen Berührungskegel, welcher X zum Centrum hat. Hieraus folgt sofort, dass durch 3 Punkte X, Y, Z die 8 Berührungskegel

der K^2 gehen, in deren Mittelpunkten sich die 3 Berührungskegel X, Y und Z treffen. Diese Mittelpunkte können wir nach Früherem als die Pole derjenigen 8 Kreise auffassen, welche die 3 bezw. in den Ebenen ξ, η, ζ liegenden Kreise x, y, z der K^2 berühren; sie liegen daher zu 2 auf denjenigen durch einen Punkt gehenden Geraden g', deren Polaren die vier in der Ebene XYZ liegenden Kegelachsen g der Kreise x, y, z sind. Zwei solche Kegel, deren Mittelpunkte K_1 und K_2 auf einer Geraden g' liegen, schneiden sich, wie wir gesehen haben, in 2 Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Polare g von g' gehen, der eine von ihnen liegt also in der Ebene XYZ und geht durch diese 3 Punkte. Die 8 durch X, Y und Z gehenden Berührungskegel der K^2 schneiden sich also in der Ebene XYZ zu 2 in 4 Kegelschnitten C^2.

Die Berührungssehne g einer solchen C^2 ist nicht nur Kegelachse für die 3 Kreise x, y, z, sondern beliebiger 3 Kreise x', y', z', deren Pole X', Y', Z' auf der C^2 liegen. Denn wir können durch diese 3 letzteren Punkte wieder 8 Berührungskegel der K^2 legen; dieselben schneiden die Ebene XYZ in 4 Kegelschnitten, von denen einer mit C^2 zusammenfallen muss, und dessen Berührungssehne daher mit g identisch ist, d. h. g ist auch Kegelachse für die 3 Kreise x', y', z'. So haben wir gefunden:

«Durch 3 Punkte einer Ebene gehen im Allgemeinen und «höchstens 4 die K^2 doppelt berührende Kegelschnitte; in «ihnen schneiden sich zu 2 die 8 Berührungskegel der K^2, «welche durch jene 3 Punkte gehen.»

«Die Berührungssehne eines die K^2 doppelt berührenden «Kegelschnitts ist eine Kegelachse für je 3 Kreise, deren «Pole auf diesem Kegelschnitte liegen.»

Da 4 Berührungskegel der K^2 im Allgemeinen keinen Punkt gemein haben, so lässt sich durch 4 beliebige Punkte einer Ebene keine die K^2 doppelt berührende C^2 legen. Wir nehmen also an, ein solcher Kegelschnitt C' sei durch einen Punkt X_1 und die Berührungssehne g gegeben. Die beiden durch C' hindurchgehenden Berührungskegel der X^2 sind

leicht bestimmt; denn ihre Mittelpunkte sind die Schnittpunkte der Geraden g' mit den beiden in der Ebene $\overline{X_1 g'}$ liegenden und durch X_1 gehenden Tangenten der K^2. Die beiden Kegelflächen schneiden sich noch in einer zweiten Kurve C''; sie lässt sich ohne Zuhülfenahme der beiden Kegel konstruiren. Nach dem Satze S. 10 ist ihre Ebene γ'' conjugiert zu γ' bezüglich der K^2 und geht durch g hindurch; der Schnittpunkt X_2 dieser Ebene γ'' mit einer der beiden durch X_1 gehenden und in der Ebene $\overline{X_1 g'}$ liegenden Tangenten der K^2 ist ein Punkt der C'', und diese ist nach dem Satze S. 14 bestimmt, da von ihr ein Punkt X_2 und die Berührungssehne g bekannt sind. Also:

«Zu einem die K^2 doppelt berührenden Kegelschnitte gehört stets ein zweiter ebensolcher, welcher auf denselben beiden Berührungskegeln der K^2 liegt wie der erste. Die Ebenen beider Kegelschnitte sind bezüglich der K^2 conjugiert, und jeder ist durch den andern ohne Hülfe der Berührungskegel vollständig bestimmt.

III. Das Schneiden unter beliebigem Winkel.

Die Ebenen aller Kugelkreise k, welche einen Kreis k_1 in einem Punkte B unter dem Winkel φ_1 schneiden, gehen durch die beiden Tangenten der K^2, welche mit der in B an k_1 gezogenen Tangente t_1 den Winkel φ_1 bilden; ihre Pole liegen daher auf den beiden Tangenten t' und t'' des Punktes B, welche mit t_1 den Winkel $90° - \varphi_1$ bilden. Lassen wir B den Kreis k_1 beschreiben, also die beiden Tangenten t' und t'' um die Gerade $K_1 M$ (M ist das Centrum von k_1) rotieren, so beschreiben sie die beiden Regelschaaren eines einschaligen

Rotationshyperboloids, dessen Geraden die K^2 in Punkten von k_1 berühren. Das ist der Satz:

«Die Pole aller Kugelkreise k, welche einen Kreis k_1 «unter dem Winkel φ_1 schneiden, liegen auf einem einscha- «ligen Rotationshyperboloide, welches die K^2 im Kreise «k_1 berührt, und dessen Geraden mit den sie schneidenden «Tangenten von k_1 den Winkel $90^0 - \varphi_1$ bilden.»

Diese Fläche werden wir gewöhnlich nur «ein die K^2 im Kreise k_1 berührendes, einschaliges Hyperboloid» nennen. Nämlich eine Fläche II. Ordnung F^2 besitzt bekanntlich zwei Schaaren unter sich paralleler Kreisebenen, und jede Kugel, welche durch einen Kreis der einen Schaar geht, schneidet aus der F^2 noch einen Kreis der andern Schaar heraus. Eine Kugel kann daher eine F^2 nur dann in einem Kreise berühren, wenn beide Kreisschaaren zusammenfallen, und dann ist die F^2 eine Rotationsfläche. Ist also H^2 ein die Kugel K^2 in einem Kreise k_1 berührendes, einschaliges Hyperboloid, so muss H^2 ein Rotationshyperboloid sein; und bildet irgend einer seiner Strahlen mit der ihn schneidenden Tangente von k_1 den Winkel φ, so thun dies alle seine Strahlen, wie sich aus Gründen der Symmetrie ohne Weiteres ergiebt. Wir können daher sagen:

«Wenn ein einschaliges Hyperboloid eine Kugel in einem «Kreise k_1 berührt, so ist es ein einschaliges Rotations- «hyperboloid, dessen Strahlen mit den sie schneidenden «Tangenten des Berührungskreises k_1 den gleichen Winkel «bilden.»

Da ein einschaliges Hyperboloid doppelt-unendlich viele Punkte enthält, so bilden die den letzteren entsprechenden Kreise ein System zweiter Stufe; eine beliebige Gerade hat mit dem Hyperboloide im Allgemeinen nur 2 Punkte gemein, und da den Punkten einer Geraden Kreise eines Büschels entsprechen, so enthält ein beliebiges Kreisbüschel im Allgemeinen 2 Kreise des Systems, und dieses heisst quadratisch:

«Die Kreise einer Kugel, welche einen Kreis k_1 unter «demselben Winkel schneiden, bilden ein quadratisches «Kreissystem zweiter Stufe.» *)

Ein einschaliges Hyperboloid, welches die K^2 in einem Kreise k berührt, wird von einer beliebigen Ebene in einer Kurve II. Ordnung geschnitten, welche die K^2 in den beiden Schnittpunkten des Kreises k und der Kurvenebene berührt. Seien nun die beiden einschaligen Hyperboloide H_1 und H_2 konstruiert, deren Punkten Kreise entsprechen, welche 2 Kreise k_1 und k_2 unter den Winkeln φ_1 bezw. φ_2 schneiden. Ein beliebiger Strahl des einen Hyperboloids trifft das andere in 2 Punkten P' und P''. Durch P' und die Gerade $g = \overline{\varkappa_1 \varkappa_2}$ legen wir eine Ebene; dieselbe schneidet die Hyperboloide in 2 Kegelschnitten, welche den Punkt P' gemein haben, die K^2 doppelt berühren und zwar g zur Berührungssehne haben, also nach dem Satze S. 14 zusammenfallen. Dasselbe gilt für die Ebene $\overline{P''g}$, also ergiebt sich:

«Berühren 2 einschalige Hyperboloide die K^2 in je einem «Kreise, so schneiden sie sich in 2 Kegelschnitten, welche «die K^2 in den Schnittpunkten der beiden Berührungskreise «berühren.»

Sei H^2 ein die K_2 im Kreise k berührendes Hyperboloid, so enthält jede Berührungsebene π eines Punktes P von k zwei Strahlen von H^2, ist also auch Berührungsebene von H^2, d. h. π und P sind Polarebene und Pol für K^2 und H^2; dasselbe gilt demnach für die Ebene $\varkappa$ des Berührungskreises und das Centrum K des Berührungskegels. Ebenso besitzt bezüglich K^2 und H^2 jede Sehne von k dieselbe Polare, nämlich die durch K gehende Schnittlinie der Berührungsebenen ihrer Endpunkte; infolgedessen hat jeder Punkt P der Ebene $\varkappa$ als Schnittpunkt zweier Sehnen dieselbe durch K gehende Polarebene und schliesslich jede Gerade von $\varkappa$ als Verbindungslinie zweier Punkte P die gleiche durch K gehende Polare. Also:

*) Vergl. Reye a. a. O. Nr. 164.

«Berührt ein einschaliges Hyperpoloid eine Kugel in einem «Kreise k, so besitzt jeder Punkt und jede Gerade der Ebene «$\varkappa$ dieselbe Polarebene und Polare in Bezug auf Kugel und «Hyperboloid.»

Denken wir uns alle einschaligen Hyperboloide, welche die K^2 in den Kreisen eines beliebigen Büschels berühren, durch eine Ebene γ geschnitten, welche die Achse g des Büschels enthält, so liegt in γ eine Schaar von Kegelschnitten C^2. Alle diese C^2 berühren die K^2 in denselben beiden Punkten von g, und mit Hülfe des letzten Satzes lässt sich ebenso wie S. 13 der folgende nachweisen:

«Alle einschaligen Hyperboloide, welche die Kugel in den «Kreisen eines Büschels g berühren, werden von einer be«liebigen Ebene dieses Büschels in einer Schaar von Kurven «II. Ordnung geschnitten. Diese Kurven berühren die K^2 «in denselben beiden reellen oder imaginären Punkten und «haben jedes Poldreieck gemein, dessen eine Seite in der «Berührungssehne g liegt.»

Wir wollen jetzt durch einen gegebenen, die K^2 doppelt berührenden Kegelschnitt C^2 ein die K^2 in einem Kreise berührendes, einschaliges Hyperboloid legen (Fig. 3). Die Ebene des Berührungskreises muss, wie wir sahen, durch die Berührungssehne g der C^2 gehen; wir legen also durch g eine beliebige Ebene, welche die K^2 im Kreise k_1 schneiden möge. Die Berührungsebene eines Punktes A von k_1 schneidet die C^2 in 2 Punkten S und T; die Gerade AS bilde mit der in A an k_1 gezogenen Tangente t_1 den Winkel φ_1, und konstruieren wir alle Tangenten der K^2, welche mit den sie schneidenden Tangenten von k_1 den Winkel φ_1 bilden, so liegen dieselben auf einem Hyperboloide H_1. Dasselbe schneidet die Ebene γ in einer Kurve II. Ordnung, welche nach dem letzten Satze und dem Satze S. 14 mit C^2 zusammenfällt. Dies Hyperboloid H_1 genügt also der Forderung; es enthält nicht nur die Gerade AS, sondern auch AT, denn die durch A gehende Gerade seiner zweiten Regelschaar liegt ebenfalls

in der Tangentialebene von A und geht durch einen Punkt der C^2, also durch T. Für die Ebene $\varkappa_1$ haben wir ein einziges der Hyperboloide H^2 erhalten, da aber $\varkappa_1$ beliebig durch g gelegt ist, so folgt (s. auch S. 13 o.):

«Durch einen die Kugel K^2 von aussen doppelt berüh-»renden Kegelschnitt C^2 lassen sich stets 2 Kegel und un-«endlich viele einschalige Hyperboloide legen, welche die «K^2 in Kreisen berühren; die Berührungskreise bilden das «Büschel, dessen Achse die Berührungssehne der C^2 ist. «Zu jedem Berührungskreise gehört indessen nur ein solches «Hyperboloid.

Wir gehen nun zur Anwendung der letzten Sätze über. Die Pole aller Kreise k, welche k_1 und k_2 unter den Winkeln φ_1 und φ_2 schneiden, liegen auf den beiden Kegelschnitten C_{12}, in denen sich die Hyperboloide H_1 und H_2 durchdringen. Den Punkten einer solchen Kurve C_{12} entspricht eine Schaar Σ von Kreisen, welche demjenigen Bündel angehören, dessen Centrum P Pol der Ebene γ_{12} von C_{12} ist; die Ebenen der Kreisschaar Σ umhüllen eine Kegelfläche II. Ordnung (Beweis s. S. 11). Jede beliebige Ebene des Raumes hat mit der C_{12} höchstens 2 Punkte gemein, und daher enthält ein beliebiges Kreisbündel der K^2 höchstens 2 Kreise der Schaar Σ. Durch die C_{12} können wir unendlich viele Berührungshyperboloide der K^2 legen; die Ebenen ihrer Berührungskreise gehen durch die Berührungssehne der C_{12}, und jeder dieser Berührungskreise wird von allen Kreisen der Schaar Σ unter gleichen Winkeln geschnitten. Ausserdem gehen durch die C_{12} zwei Berührungskegel der K^2, also werden die Kreise der Schaar Σ noch von 2 Kreisen berührt. Zusammengefasst giebt dies den Satz:

«Alle Kreise k, welche 2 Kreise k_1 und k_2 unter den «Winkeln φ_1 bezw. φ_2 schneiden, liegen in 2 Bündeln; in «jedem derselben bilden sie eine Schaar Σ, deren Ebenen «eine Kegelfläche umhüllen, und welche mit einem belie-«bigen Kreisbündel der K^2 im Allgemeinen und höchstens

«2 Kreise gemein hat. Die Kreise jeder Schaar Σ werden «von jedem Kreise des Büschels $(k_1\ k_2)$ unter gleichen «Winkeln geschnitten und von 2 Kreisen dieses Büschels «berührt. » *)

Werden mehrere Kreise dieses Büschels $(k_1\ k_2)$ von einem und daher von allen Kreisen k der Schaar Σ unter demselben Winkel φ geschnitten, so liegen ihre Pole auf jedem Hyperboloide H^2, welches die K^2 in einem solchen Kreise k berührt, und dessen Strahlen mit den Tangenten von k den Winkel $90^0 - \varphi$ bilden. (Fig. 4). Ausserdem liegen ihre Pole auf g', sind also die Schnittpunkte von g' mit H^2. Nun kann g' nicht ganz auf H^2 liegen, denn dann würden alle Kreise, deren Pole auf g' liegen, von k unter demselben Winkel φ geschnitten, und das trifft für die beiden zuerst angenommenen Kreise k_1 und k_2 jedenfalls nicht zu; demnach enthält g' im Allgemeinen und höchstens 2 Punkte von H^2. D. h.:

«Die Kreise jeder der beiden im letzten Satze genannten «Schaaren Σ werden im Allgemeinen und höchstens von «2 Kreisen des Büschels $(k_1\ k_2)$ unter demselben gegebenen «Winkel geschnitten. Die Ebenen dieser beiden Kreise sind «durch die Mittelpunkte der beiden Schaaren Σ harmonisch «getrennt. »

Der Beweis des Nachsatzes wird sich weiter unten (s. S. 23 o.) in geeigneterem Zusammenhang ergeben.

Um alle Kreise zu finden, welche 3 gegebene k_1, k_2 und k_3 unter den bezw. Winkeln φ_1, φ_2 und φ_3 schneiden, konstruiren wir die 3 Hyperboloide H_1, H_2 und H_3, welche die K^2 in k_1, k_2 bezw. k_3 berühren, und deren Strahlen mit den Tangenten dieser Kreise die Winkel φ_1, φ_2 bezw. φ_3 bilden. Durch dieselbe Betrachtung wie S. 11 zeigt sich, dass diese 3 Hyperboloide sich in 8 Punkten treffen, welche zu 2 auf 4 durch den Punkt $\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3$ gehenden Geraden liegen. Also:

---

*) Vergl. Reye a. a. O. Nr. 165.

«Die 8 Kugelkreise, welche 3 gegebene k_1, k_2, k_3 unter «den Winkeln φ_1, φ_2, φ_3 schneiden, liegen zu 2 in 4 Kreis-«büscheln; die Achsen dieser Büschel liegen in der Ebene. «welche die Pole der 3 gegebenen Kreisebenen verbindet.»

Ein besonderer Fall ist der, dass die 3 Winkel φ_1, φ_2, φ_3 gleich sind, etwa gleich φ. Seien zunächst die beiden Schaaren von Kreisen k' und k'' konstruiert, welche k_1 und k_2 unter dem Winkel φ schneiden; wir wissen, ihre Pole liegen auf zwei Kegelschnitten C' und C'', ihre Ebenen $\varkappa'$, $\varkappa''$ gehen also jede durch den Pol P' bezw. P'' der Ebene γ' von C' bezw. γ'' von C''. Da ein beliebiger dieser Kreise k von k_1 und k_2 unter demselben Winkel φ geschnitten wird, so liegen die Pole K_1 und K_2 auf dem Hyperboloide H^2, welches die K^2 in k berührt, und dessen Geraden mit den Tangenten von k den Winkel $90°-\varphi$ bilden; ausserdem liegen sie auf der Geraden g', welche auch den Punkt P' enthält. (Fig. 4). Dieser Punkt liegt in $\varkappa'$, hat also nach dem Satze S. 19 bezüglich des Hyperboloids H^2 dieselbe Polarebene wie in Bezug auf die K^2 nämlich γ', also sind P' und γ' und daher auch die beiden Punkte P' und $Q'=\overline{\gamma' g'}$ durch K_1 und K_2 harmonisch getrennt. Sie sind ferner durch die K^2 harmonisch getrennt, also müssen sie, wie S. 10 nachgewiesen, mit den beiden Kegelcentren von k_1 und k_2 zusammenfallen. Ebenso müssen auch P'' und $Q''=\overline{\gamma'' g'}$ mit den beiden Kegelcentren identisch sein, d. h. P' und P'' sind die Kegelcentra von k_1 und k_2. Das ist der Satz:

«Zwei einschalige Hyperboloide, welche eine Kugel K^2 «in Kreisen k_1 und k_2 berühren, und deren Geraden mit «den sie schneidenden Tangenten von k_1 und k_2 denselben «Winkel bilden, schneiden sich in Kegelschnitten, welche die «K^2 in den beiden Punkten $(k_1\ k_2)$ berühren, und deren «Ebenen die Kegelcentra von k_1 und k_2 zu Polen haben.»

Dieser Satz, auf unsere Kreistheorie übertragen, lautet:

«Alle Kreise, welche 2 Kugelkreise k_1 und k_2 unter glei-«chen Winkeln schneiden, bilden die beiden Kreisbündel, «deren Mittelpunkte die Kegelcentra von k_1 und k_2 sind.»

Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der S. 11 genannte. Da die Kegelcentra der Kreise k_1 und k_2 nach dem Satze S. 10 durch die beiden Kreisebenen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ harmonisch getrennt sind, so ist jetzt auch der S. 21 erwähnte Nachsatz bewiesen.

Die 6 Kegelcentra, welche 3 Kreise paarweise bestimmen, liegen zu 3 in den 4 Kegelachsen, also folgt aus dem letzten Satze sofort:

«Alle Kreise, welche 3 Kugelkreise unter gleichen Win-
«keln schneiden, bilden die vier Kreisbüschel, deren Achsen
«die Kegelachsen jener 3 Kreise sind.»

In diesen beiden Sätzen war von der Grösse des Winkels φ nichts vorausgesetzt; sobald derselbe aber eine vorgegebene Grösse hat, gelten die Sätze S. 20 u. und S. 22 o. Es ist daher im Allgemeinen unmöglich, einen Kreis zu konstruiren, welcher 4 gegebene unter dem bestimmten Winkel φ trifft; wohl aber ist es möglich, Kreise zu finden, welche 4 gegebene gleichwinkelig schneiden. 4 Kugelkreise bestimmen nämlich zu je zwei 12 Kegelcentra, und da die 6 Kegelcentra dreier Kreise zu 3 auf 4 Geraden liegen, so liegen jene 12 Kegelcentra zu 3 auf $4.4 = 16$ Kegelachsen. Weil jedes Kegelcentrum zu 2 Kreistripeln der 4 Kreise gehört, so gehen durch jedes Kegelcentrum 4 Kegelachsen. Dieselben lassen sich zu je 2 durch 6 Ebenen verbinden; in 2 dieser Ebenen liegen die 4 Kegelachsen von je 3 Kreisen, die 4 andern wollen wir Kegelebenen nennen. In jeder solchen Kegelebene liegen auf den beiden sie bestimmenden Kegelachsen zusammen 5 Kegelcentren, von denen 2 Paar noch durch je eine Kegelachse verbunden werden können, sodass in einer Kegelebene 4 Kegelachsen liegen, die sich in 6 Kegelcentren schneiden. Durch jedes der 12 Kegelcentren legten wir 4 Kegelebenen, da aber jede der letzteren 6 Kegelcentren enthält, so giebt es im Ganzen nur $\frac{12.4}{6} = 8$ Kegelebenen. Die 6 Kegelcentren einer Kegelebene werden durch die 6 Combinationen aller 4 Kreise zu je 2 erzeugt, es folgt daher aus dem letzten Satze,

dass die 4 gegebenen Kreise von dem in der Kegelebene liegenden unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Also:

«Es giebt im Allgemeinen 8 Kreise, welche 4 Kugelkreise «gleichwinkelig schneiden, sie liegen in den 8 Kegelebenen «der letzteren.»

Wir wollen noch dem S. 16 aufgestellten Satze eine allgemeinere Form geben. In jeder von 2 bezüglich K^2 conjugierten Ebenen γ' und γ'' sei eine die K^2 in Punkten von $\overline{\gamma'\gamma''} = g$ doppelt berührende Kurve II. Ordnung C' und C'' angenommen. Durch wie viele die K^2 in Kreisen berührende Hyperboloide können wir beide Kurven verbinden? Durch einen beliebigen Punkt M von C'' gehen von jedem der gesuchten Hyperboloide 2 Geraden; dieselben sind Tangenten der K^2. Da nun durch M höchstens vier die C' treffende Tangenten von K^2 gehen, — es sind die Verbindungslinien des Punktes M mit den 4 Schnittpunkten der Kurve C' und des Berührungskegels M, — so gehen durch M und die C' höchstens 2 Berührungshyperboloide H_1 und H_2; sie enthalten nach den Sätzen S. 14 und 20 o. auch die C''. Sei k_1 der Berührungskreis des Hyperboloids H_1, und mögen die Geraden von H_1 mit den Tangenten von k_1 den Winkel φ bilden, so entsprechen den Kegelschnitten C' und C'' zwei Kreisschaaren, welche k_1 unter dem Winkel φ schneiden. Nach dem Satze S. 21 können wir noch einen zweiten Kreis k_2 konstruiren, welcher ebenfalls von beiden Kreisschaaren unter dem Winkel φ geschnitten wird. Daher geht nach dem Satze S. 22 u. durch jene beiden C' und C'' auch dasjenige Hyperboloid, welches die K^2 in k_2 berührt, und dessen Geraden mit den Tangenten von k_2 den Winkel φ bilden. Dasselbe muss aber mit H_2 identisch sein, da wir eben nachgewiesen haben, dass durch C' und C'' nur die beiden Hyperboloide H_1 und H_2 gehen. Das ist folgender Satz:

«Zwei die K^2 doppelt berührende Kegelschnitte, welche «in conjugierten Ebenen liegen und die Schnittlinie beider «Ebenen zur Berührungssehne haben, lassen sich im Allge«meinen und höchstens durch 2 die K^2 in Kreisen berüh-

«rende einschalige Hyperboloide verbinden. Die Geraden «dieser beiden Hyperboloide bilden mit den sie schneidenden «Tangenten der Berührungskreise alle denselben Winkel. »

Betrachtet man den Kegel als Grenzfall des einschaligen Hyperboloids, so sieht man, wie dieser Satz den S. 16 gegebenen als speziellen Fall enthält. Zwischen den Kegelschnitten, welche die K^2 in 2 Punkten einer Geraden berühren und in 2 durch diese Gerade gehenden, bezüglich K^2 conjugierten Ebenen liegen, findet also auf Grund der Sätze S. 16 und 21 folgende Wechselbeziehung statt: Ein beliebiger solcher Kegelschnitt der einen Ebene lässt sich mit jedem derartigen Kegelschnitt der andern durch 2 die K^2 in Kreisen berührende, einschalige Hyperboloide verbinden, aber nur mit einem derselben, dessen Konstruktion S. 16 o. angegeben ist, durch 2 Berührungskegel der K^2.

VITA.

Am 28. Februar 1865 wurde ich als Sohn des Buchbinders Wilhelm Schumacher in Paris geboren. Vom siebenten Lebensjahre ab besuchte ich das Lyceum in Metz und wurde im Herbste 1884 von demselben mit dem Zeugnis der Reife entlassen. Im Oktober desselben Jahres wurde ich an der Kaiser-Wilhelms-Universität in Strassburg immatrikulirt und habe daselbst bis zum Sommer 1888 incl., wo ich das Staatsexamen bestand und ein Oberlehrerzeugnis erhielt, Mathematik und Naturwissenschaften studiert. Seit September 1888 bin ich Probekandidat an der Realschule in Metz. Während meiner Studienzeit hörte ich Vorlesungen folgender Herren:

de Bary, Bücking, Carrière, Christoffel, Cohn, Fittig, Goette, Kundt, Levy, Reye, Roth, Schering, Graf Solms, Windelband und Ziegler.

Herrn Prof. Reye, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit entstand, spreche ich an dieser Stelle für sein reges Interesse an meinen Studien den herzlichsten Dank aus.

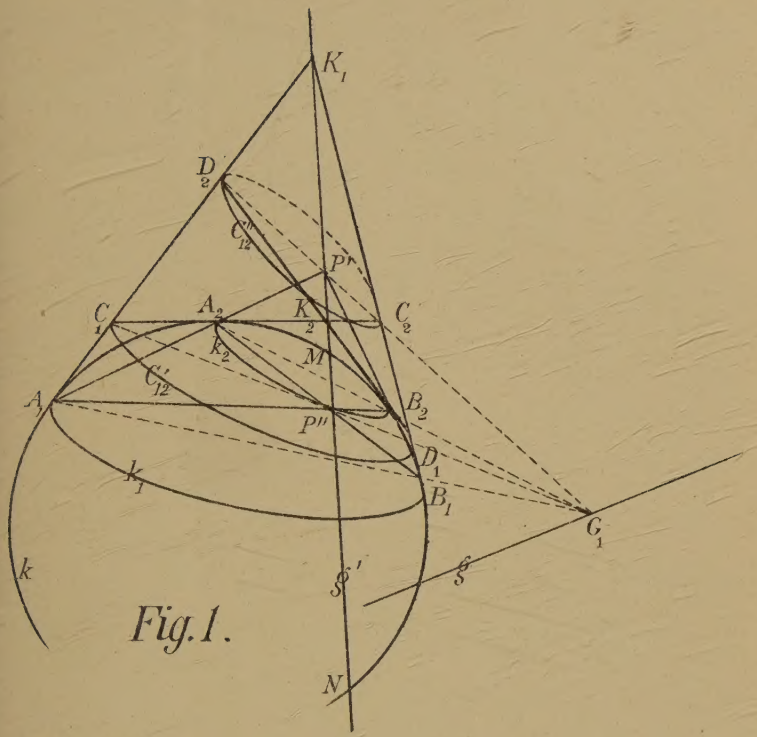

Fig. 1.

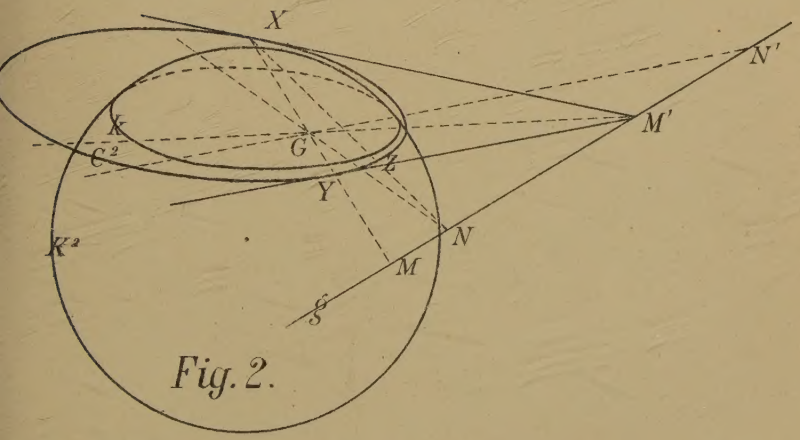

Fig. 2.

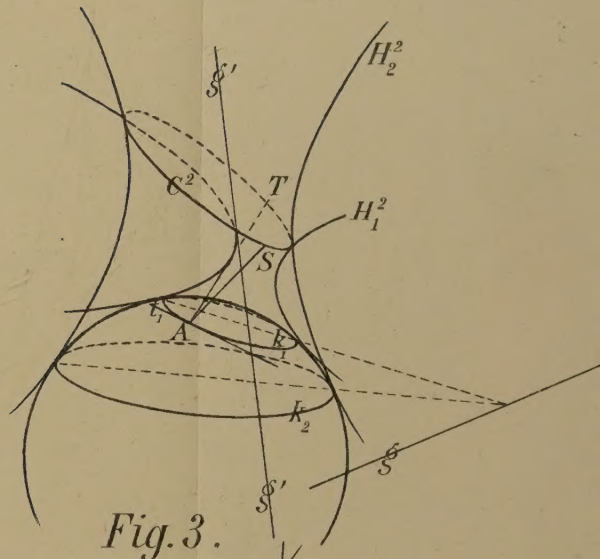

Fig. 3.

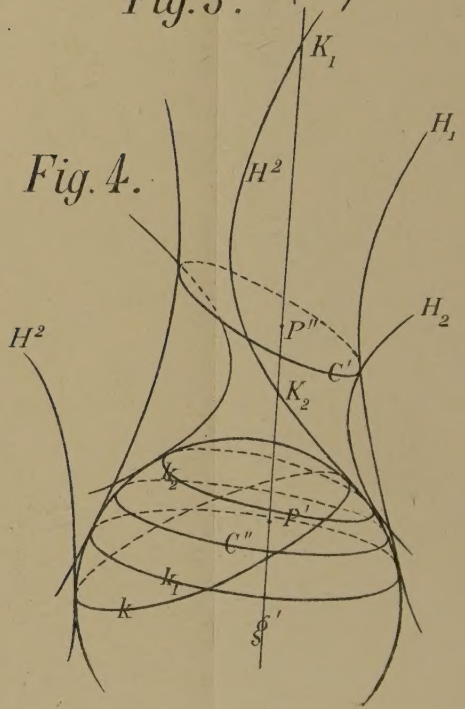

Fig. 4.